Al Sr. Dn. Jose Antonio Ramallo

COMPENDIO DE ÁLGEBRA

REDACTADO POR

Luis Valenzuela

COCHABAMBA, 1866.

TIPOGRAFÍA DE GUTIERREZ.

ELEMENTOS DE ÁLGEBRA.

PARTE PRIMERA.

Del Algebra, sus caracteres y signos.

1 El álgebra es una parte de las matemáticas puras, que tiene por objeto tratar de un modo jeneral la relacion de las cantidades, representándose estas por las letras del alfabeto, y las relaciones que hai entre ellas por medio de ciertos signos.

2 Los signos de que se vale el álgebra para indicar sus operaciones, son los mismos que los de la aritmética y son los siguientes:

El signo $+$ que se lée mas denota una adicion, asi esta esprecion $a+b$ denota que la a se suma con la b.

El signo $-$ que se lée menos denota una sustraccion; asi $a-b$, quiere decir que de la a se reste b.

El signo $\times$ se lée multiplicado por; así $a\times b$, dice que se multiplique a por b, aunque en la multiplicacion se suele omitir el signo, poniendo un punto entre las letras que se han de multiplicar; de este modo $a.b$, o solo juntando las letras sin poner nada entre ellas, como en esta ab, y este es el modo mas comun.

El signo : se lée dividido por; así $a{:}b$, denota que la a se parta por la b, aunque tambien se indica la division así $\frac{a}{b}$.

Esta espresion $a=b$, dice que la a es igual a la b. Esta, $a>b$, dice que la a es mayor que la b, $a<b$, a menor que b. Este signo, $\sqrt{\ }$ que se llama radical, sirve para indicar la estraccion de las raices de las cantidades.

Los signos $+$ y $-$ sirven tambien para espresar las cantidades positivas y negativas, siendo positivas aquellas que conspiran al fin que se propone el calculador, y negativas, aquellas q' se oponen. Asi si quiero averiguar en cuanto tiempo se llenará una fuente que por un lado entra agua y por otro sale, se tendrá que atender al agua que entra y a la que sale; y como la que entra ayuda mi objeto será la positiva que se espresará con el signo $+$; y la que sale será la negativa que se espresará con el signo $-$.

De donde se deduce que los signos $+$ y $-$ tienen dos acepciones: una jeneral que es la de indicar la operacion que hai que hacer, y otra particular de decir si la cantidad a que afecta es positiva o negativa.

3 Toda cantidad o espresion a la cuál precede un solo signo $+$ o $-$ se llama término. Se llaman dimensiones de un término, a lás letras de que consta; así a es un término de una dimencion, $4ab$ de dos. Monomio o cantidad monomia, es la espresion que consta de un solo término, y polinomio a la que consta de mas de uno, siendo en particular, binomio, trinomio, etc. cuando consta de dos, de tres etc. monomios.

Los polinomios se dividen en homojéneos y heterojéneos; son homojéneos cuando todos sus términos son de igual número de letras y heterojéneos cuando no tienen igual número de letras.

4 *Coeficiente* es un número escrito a la izquierda de una letra, y espresa las veces que esta letra está tomada como sumando: por ejemplo en vez de $a+a$ se dice $2a$ y el número 2 es el coeficiente.

5 *Esponente* es un número escrito a la derecha y un poco encima de una letra, y espresa las veces que esta letra está tomada como factor, por ejemplo en vez de aa o $a \times a$ se dice a^2. Este número es el esponente que se lee a dos.

Cuando una letra está sola, se le supone la unidad por coeficiente y la unidad por esponente asi a es lomismo que $1a$ y a^1.

Tambien se suprime el signo $+$ al principio de una cantidad, así $a+b$ es lomismo que $+a+b$.

6 *Términos semejantes* se llaman aquellos que tienen unas mismas letras y en cada una los mismos esponentes (5). Es mui frecuente en el álgebra el encontrar términos semejantes en los resultados de las operaciones, en cuyo caso se les deben simplificar.

7 *Para simplificar los términos semejantes*, hai que ver si tienen un msimo signo o diferente. Si tienen un mismo signo, se suman los coeficientes (4) de los términos semejantes, (6) y reuniéndolos en uno se le dá

a este por coeficiente, el que resulte de la suma de los coeficientes de los términos semejantes, poniéndole el mismo signo, cuya operacion se llama reduccion. (A) Si los términos semejantes tienen diferente signo se restan los coeficientes, poniendo la resta a uno de los términos con el signo del término que tenga mayor coeficiente, cuya operacion se llama destruccion (B).

Cuando al hacer una destruccion los términos semejantes son iguales por tener un mismo coeficiente se borran o se tachan donde estén (C).

De la adicion.

8 No representando las letras valores determinados, no se puede con ellas hacer ninguna de las operaciones de la aritmética; por consiguiente, lo que se llama en álgebra ejecutar las operaciones, no es otra cosa que una mera indicacion de ellas, por esto para sumar las cantidades algébricas, ya sean monomias o polinomias: se escriben todos los términos los unos a continuacion de los otros con los signos que tengan, y cuando haya términos semejantes (6), se hace la simplificacion de ellos (7) (D).

De la sustraccion.

9 Para sustraer o restar cantidades algébricas, se escribe el sustraendo debajo del

minuendo, dejando este como esté, y cambiando los signos de los términos del sustraendo; y despues se hace la simplificacion de los términos semejantes, si los hubiese (7) (E).

De la multiplicacion.

10 Queda dicho (2) que la multiplicacion de las cantidades algébricas se indica de tres modos: o bien con este signo ⋈, o con un punto entre los factores, o poniéndoles a estos unos a continuacion de otros sin ningun signo intermedio: pero ahora nos falta ver como se ejecuta la operacion.

Tres casos ofrece la multiplicacion de las cantidades algébricas: 1º Un monomio por otro monomio; 2º un polinomio por un monomio o viceversa, y 3º un polinomio por otro.

Si entre los factores se encuentran coeficientes, se multiplican estos entre si por las reglas de la aritmética, poniendo el resultado por coeficiente en el producto.

Si se hallase una misma letra en mas de un factor, con el fin de evitar la repeticion de esta misma letra, nos valdremos de un modo mui sencillo; esto es, espresaremos con un solo guarismo el número de veces que la letra está repetida como factor; y este guarismo como sabemos se llama esponente [5]. Así $aaa=a^3$.

11 Las espresiones que indican el producto de una cantidad multiplicada por si misma una o mas veces, se llaman *potencias*

de dicha cantidad. Las potencias se clasifican segun el número de veces que una letra está tomada como factor: asi a la espresion a^2, se llama segunda potencia de a; a^3 es la tercera potencia; a^4 la cuarta etc.: a la segunda potencia se le da tambien el nombre de cuadrado, a la tercera el de cubo.

12 De donde resulta que para multiplicar las letras que estén repetidas en los factores, se las reune en una sola, poniéndole por esponente, el que resulte de la suma de los esponentes de esas letras.

13. Como los monomios que haya que multiplicar pueden estar ligados con los signos + o —; es necesario saber que signo deberá llevar el producto; y para esto la regla es la siguiente: cuando los dos términos que se multiplican tienen el mismo signo, debe llevar el producto el signo +; y cuando tienen diferente, debe llevar el producto el signo.— Esta regla se espresa diciendo: signos semejantes dan mas, y signos diferentes dan menos.

De todo lo dicho se infiere que para la la multiplicacion de las cantidades algébricas hai que atender indispensablemente a cuatro reglas, que son: *signos, coeficientes, letras y esponentes*.

Como queda dicho, [13] signos semejantes dan mas, y signos diferentes dan menos.

Los coeficientes [10] se multiplican por las reglas de la aritmética.

Las letras que son diferentes en ambos factores, se ponen unas a continuacion de otras.

En punto a los esponentes, los de una

misma letra se suman [F].

14 Para multiplicar un polinomio por un monomio o viceversa; se multiplicará el monomio por todos los términos del polinomio y lo que resulta será el producto (G).

Cuando las cantidades que se han de multiplicar son polinomios se escribe el multiplicando (o el que asi se considere,) encima del multiplicador atendiendo a las reglas de los signos, coeficientes, letras i esponentes (13), multiplíquese cada término del multiplicador por todo el multiplicando y resultarán los productos parciales, súmense en seguida estos y lo que resulta será el producto total, en el cual se hará la simplificacion necesaria [7] [H]

De la division.

15 En la division de las cantidades algébricas ocurren tambien tres casos: 1° dividir un monomio por otro monomio; 2° un polinomio por un monomio; y 3° un polinomio por otro.

Para dividir un monomio por otro se deben seguir las mismas reglas que para la multiplicacion, supuesto que dividir una cantidad por otra no es otra cosa que hallar el factor de un producto cuando se conoce el mismo producto y el otro factor: de donde se sigue que multiplicados entre si el divisor y el cociente han de producir el dividendo.

16 Con lo dicho podemos establecer u-

na regla para los signos, y es la siguiente: cuando el dividendo y divisor tengan un mismo signo, ya sea el + o el—, el cociente debe llevar el signo +; y cuando el dividendo y divisor tengan signo diferente, debe llevar el cociente el signo—.

17 Los coeficientes se dividen por las reglas de la aritmética; y si no son divisibles el uno por el otro, se indica la division poniendo el divisor debajo del dividendo separados con una raya.

18 Las letras que sean diferentes en el dividendo y divisor, se las pone en el cociente en forma de fraccion; y las letras que sean comunes en el dividendo y divisor y estando ademas con un mismo esponente, se borran en ambos términos.

Si las letras siendo comunes tienen diferentes esponentes, se resta el menor del mayor, poniendo en el cociente la misma letra con un esponente igual a la diferencia hallada.

Si en el dividendo hai letras que no hai en el divisor, se las pone como están en el cociente.

19 De modo que uniendo todos los casos que hemos considerado separadamente podemos deducir la siguiente regla para dividir un monomio por otro: 1° signos semejantes dan *mas* en el cociente y desemejantes dan *menos* [16]: 2° divídase el coeficiente del dividendo por el del divisor como en la aritmética [17]: 3° Bórrense del dividendo las letras iguales a las del divisor si tuviesen esponentes igua-

les, y en caso contrario escríbanse en el cociente las letras iguales, cada una con un esponente igual a la diferencia entre los esponentes del dividendo y divisor: 4° finalmente, escríbanse en el cociente las letras que quedaren en el dividendo [18] [J].

20 La aplicacion de estas operaciones, estúdiese con atencion en los ejemplos de las Notas para la facilidad de los casos siguientes.

21 La division de un polinomio por un monomio; se reduce a dividir sucesivamente cada término del dividendo por el divisor, siguiendo las reglas ya establecidas [K].

22 Para dividir un polinomio por otro despues de escribir el divisor a la derecha del dividendo separados con dos rayas como en la aritmética, lo primero que hai que hacer es ordenar, para lo cual se verá la letra que está mas repetida en el dividendo y divisor y se volverán a escribir principiando en ambos por el término en que dicha letra tenga mayor esponente; despues el que tenga el esponente inmediato menor. Hecho esto divídase el primer término del dividendo por el primero del divisor y se tendrá un término en el cociente; multiplíquese este término por todo el divisor y réstese el producto de todo el dividendo, lo cual se consigue mudando los signos del producto conforme se vayan formando, [9] y se hará en seguida la destruccion que se pueda. Despues se divide el primer término de esta resta por el primero del divisor lo que dará el segundo término

del cociente; despues se ejecutará la multiplicacion y la resta y se continuará del mismo modo hasta que resulte cociente exacto o hasta que el esponente de la letra que se ordene, sea menor en la resta que el divisor en cuyo caso se indica la última division. Al practicar esta operacion se debe atender siempre a las reglas de los signos, coeficientes, letras y esponentes [19] [L].

De los quebrados literales.

23 Las operaciones de las fracciones literales, son las mismas que las numéricas; Por consiguiente para sumar los quebrados literales, que tengan un mismo denominador se suman los numeradores, poniendo por denominador de la suma el que es comun a todos los sumandos [M].

Si los quebrados tuviesen denominadores diferentes, se reducirian a un comun denominador, para sumar los numeradores.

24 La operacion de restar es la misma que la de sumar, con la diferencia de que en vez de sumar los numeradores se restan (N).

25 Para multiplicar los quebrados literales, se ejecuta la multiplicacion de los numeradores y denominadores entre sí (O).

26 Para dividirlos, se multiplican en cruz observando las reglas establecidas en la aritmética [P].

FIN DE LA PRIMERA PARTE.

SEGUNDA PARTE.

De la análisis determinada y resolucion de las ecuaciones de primer grado con una sola incógnita.

27 Sabiendo ya el modo de ejecutar las operaciones fundamentales, pasemos a tratar de la análisis.

Análisis es la parte del álgebra que trata de la resolucion de los problemas.

Para resolver un problema es necesario: 1° traducirle al lenguaje algébricó, lo que se llama plantear el problema o ponerle en ecuacion: 2° ejecutar la série de operaciones que nos indique la ecuacion establecida, para dejar la incógnita que se busca sola en un miembro, y en el otro todas las cantidades conocidas, lo que se llama despejar la incógnita.

De estas dos partes la primera no está sujeta a ninguna regla fija, y solo la práctica ayudada del mayor o menor talento de cada uno puede hacerlo mas o menos diestro en esta traduccion. Sin embargo diremos que lo mejor que puede hacerse para plantear un problema es, despues de haber representado todas las cantidades conocidas por las primeras letras $a,b,c,d,$ etc y las incognitas por las últimas, $x,y,u,z,$ se deben indicar con los signos las operaciones que haya que ejecutar, y suponer conocido lo mismo que se trata de indagar para despues llegar a conocerlo.

La segunda parte, esto es el despejo de las incógnitas, está sujeta a reglas fijas; pero antes de tratar de ellas, conviene hablar de los problemas y de las ecuaciones.

28 Un *problema* se dice que es *determinado,* cuando sus condiciones suministran tantas ecuaciones como cantidades incógnitas; y se llama análisis *determinada* la que trata de esta clase de cuestiones. El problema es *indeterminado* cuando el número de incógnitas es mayor que el de las ecuaciones y se llama análisis *indeterminada* a la que trata de esta clase de cuestiones.

Del mismo modo se dice que una ecuacion es *determinada* cuando no contiene mas que una incógnita, y es *indeterminada* cuando contiene varias.

Las *ecuaciones* sean determinadas o indeterminadas, se dividen en grados. En las ecuaciones determinadas se clasifican los grados con arreglo al mayor esponente que tenga la incógnita; de modo que se llama ecuacion de primer grado aquella en que la incógnita no pasa de la primera potencia; de segundo grado, cuando la incógnita esta elevada al cuadrado o la segunda potencia y asi sucesivamente (A).

Para clasificar las ecuaciones indeterminadas hai q' atender a si las incógnitas (q' en este caso se llaman variables) están multiplicadas unas por otras; pues en este caso, para conocer el grado de la ecuacion se multiplican entre si las variables, y el producto que resulte determinará el grado de la potencia (B).

Cuando las ecuaciones pasan del primer grado pueden ser de dos maneras; *puras* o *incompletas*, que son aquellas en que solo se halla la incógnita con el esponente que dá nombre a la ecuacion; y *mixtas*, *completas* o *afectas* que son aquellas en que ademas del término donde se halla la incógnita con el esponente que dá nombre a la ecuacion, se encuentra en otros términos con un esponente menor (C).

29 Como en la resolucion de todo problema hai que hallar una o mas cosas desconicidas en valores de las que se dan conocidas, todo el artificio de la análisis cuando ya está planteado el problema, consiste en determinar a que cantidades conocidas es igual o son iguales las incógnitas; y todas las operaciones que se ejecuta para dejar dicha incógnita sola en un miembro, sin coeficiente esponente, ni divisor, y con el signo positivo; y las cantidades conocidas en el otro, se comprenden bajo el nombre de *despejo de las incógnitas*.

El despejo de las incógnitas está fundado en el principio siguiente: si con cantidades iguales se hacen operaciones iguales, los resultados son iguales; y hai una regla para saber las operaciones que se han de hacer.

30 Al despejar una incógnita no siempre se presentan ecuaciones sencillas, sino que se hallan ligadas a un tiempo las incógnitas

con las cantidades conocidas, por via de suma, resta, multiplicacion y division; y en este caso para despejarla, lo que se hace es: 1 ° pasar al primer miembro todos los términos donde se halla la incógnita, y al segundo todos los términos donde no se halla, cambiando siempre los signos: 2 ° despues se quitan todos los divisores si los hai, lo que se consigue multiplicando cada término por el producto de los divisores de los demas: 3. ° Luego se reducen a uno solo todos los términos donde se halla la incógnita, si la ecuacion es numérica; y si es algébrica, se descompondrá el primer miembro en dos factores, sacando la incógnita fuera de un paréntesis, y encerrando dentro de él todo lo que la multiplique: 4 ° y finalmente, quedará despejada dividiendo el otro miembro por todo lo que multiplica a la incógnita (D).

31 Antes de pasar adelante, conviene advertir que las cuestiones que intentemos resolver pueden contener a veces condiciones incompatibles o contradictorias: lo que no debe parecer estraño si se considera que la resolucion de todo problema se reduce a encontrar una cantidad desconocida por la combinacion de otras que se conocen; y que no todas las cantidades pueden provenir de una combinacion cualquiera que se haga con otras. Por ejemplo, es absolutamente imposible que dada una cantidad se obtenga por su medio otra menor que ella, valiéndose de una operacion de aumento; ni otra mayor por medio

de una operacion de diminucion: asi como seria tambien absurdo suponer una razon de igualdad entre dos cantidades que por su naturaleza deben ser precisamente desiguales. Luego si nos proponemos uno de estos objetos aunque absurdos, la espresion final que nos diese el cálculo, no podria menos que indicar la imposibilidad o el absurdo de la cuestion.

Para poner en práctica las reglas dadas, [30] (31) resuélvanse los problemas de las Notas (E).

De la resolucion de dos o mas ecuaciones con igual número de incógnitas.

32 Cuando al plantear una cuestion nos hallamos con tantas ecuaciones como incógnitas hemos dicho que la cuestion es determinada; (28) en este caso para despejar cada una de las incógnitas hai que hacer uso de un procedimiento que se llama *eliminacion*. Hai tres métodos diferentes de *eliminacion*: 1° el de *sostitucion*: 2° el de *igualacion*: y 3° el de *adicion o sustraccion*.

El de *sostitucion*. Consiste en determinar en la ecuacion mas sensilla la incógnita que sea mas fácil de despejarse; y sostituir su valor en las demas, si hubiere mas de dos; de cuya sostitucion resulta una ecuacion menos y una incógnita menos; en seguida en una de las ecuaciones que quedan y que sea la mas sensilla, determinar otra incógnita que sea tambien mas fácil de despejarse, y se sostituye su valor en las demas; asi se continúa hasta que solo haya una ecuacion con una incógnita, en cuyo caso se despejará y se sostituirá su valor en las anteriores, a fin de tener en cantidades conocidas espresado el valor de todas las incógnitas [F].

34 El método de igualacion consiste en despejar una misma incógnita en todas las ecuaciones, igualar despues el valor sacado de la primera, con cada valor sacado de las demas, lo que dará una ecuacion y una incógnita menos, despues en las ecuaciones que quedan se determinará otra incógnita; y sacando sus valores se igualarán entre sí, lo que nos dará otra ecuacion y otra incógnita menos; y asi se procederá hasta que solo haya una sola ecuacion con una sola incógnita, la cual se despeja por las reglas ya sabidas, (30) sostituyendo su valor en las anteriores (G).

35 El tercer método de *adicion o sustraccion*. Consiste en hacer iguales, en las ecuaciones, los coeficientes de la incógnita que se quiere eliminar, lo que se consigue multiplicando todos los términos de la primera ecuacion por el coeficiente que tiene en la segunda la incógnita que se quiere eliminar; y todos los términos de la segunda, por el coeficiente de la misma incógnita en la primera. Siendo por este medio iguales los coeficienies, si son de signos diferentes, se suman las dos ecuaciones miembro pos miembro y los dos términos que contenian la incóg-

nita se destruyen. Si los coeficientes son de un mismo signo, se restan en el mismo órden las dos ecuaciones [H].

De las ecuaciones de segundo grado.

36 Hemos dicho que son ecuaciones de segundo grado, aquellas en que la incógnita está elevada a 2 o a la segunda potencia [28].

Las ecuaciones determinadas de segundo grado, se resuelven como las de primero, despejando la incógnita por medio de la operacion contraria a la que esté ejecutada con ella. Asi pues, una ecuacion pura de segundo grado, deberá resolverse estrayendo la raiz cuadrada del segundo miembro, supuesto que en el primero está la incógnita elevada a la segunda potencia [J].

37 Como hasta ahora nada hemos dicho a cerca del modo de ejecutar ni de indicar siquiera esta operacion, advertiremos que para estraer la raiz de una cantidad se usa de este signo $\sqrt{}$ colocando antes de los guarismos o letras cuya raiz se quiera estraer; y colocando entre los brazos de dicho signo un guarismo que esprese el grado de la raiz; así $\sqrt[3]{a}$ espresa la raiz tercera o cúbica de a, etc. Cuando la raiz es cuadrada no se acostumbra poner el esponente: asi que, cuando encontremos un radical sin esponente sabremos ya que es una raiz cuadrada.

38 Para resolver ecuaciones de segundo

grado tenemos necesidad de saber estraer las raices, tanto de los números como de las letras; y como esta operacion es tanto mas difícil, cuanto mayor es el número cuya raiz se quiere estraer, es preciso que tengamos una regla jeneral para estraer dicha raiz de cualquier cantidad; y para ello se necesita antes de todo, saber cuales son los cuadrados de los números díjitos; para lo que damos la tabla siguiente:

Raices.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Cuadrados.	1	4	9	16	25	36	49	64	81	100

39 En ella vemos que el cuadrado de un número que no consta mas que de unidades no puede tener mas de dos guarismos; y el número que como el 10, consta de decenas y unidades, su cuadrado consta de tres guarismos. Sabido esto pasemos a la estraccion de la raiz cuadrada de un número que consta de decenas y unidades.

40 Si se eleva al cuadrado un número cualquiera: v.g. $a+b$, despues de hecha la multiplicacion de esa cantidad por ella misma y reducidos los términos semejantes, resultará $a^2+2ab+b^2$, lo que quiere decir que el cuadrado de un binomio o lo que es lo mismo de una cantidad que se compone de dos partes, consta de tres partes, a saber: 1ª cuadrado de la primera parte; 2ª duplo de la primera por la segunda; y 3ª cuadrado de la segunda. De donde se deduce, que siempre que

un número conste de decenas y unidades, su cuadrado se compondrá, del cuadrado de decenas, mas el doble producto de decenas por unidades, mas el cuadrado de unidades; y en todo número que conste de decenas y unidades como 24, la primera parte 20 son las decenas y la segunda 4 son las unidades.

41 De donde se deduce, que para estraer la raiz cuadrada de un número cualquiera se observa la siguiente regla:

Divídase el número en períodos de a dos cifras principiando por la derecha; colóquense a la derecha rayas como en la division, se saca la raiz del primer período de la izquierda y esta raiz se coloca entre las rayas. En seguida se cuadra dicha raiz, y este cuadrado se resta del primer período de la izquierda y al lado de esta resta se baja el período siguiente, se separa la última cifra de la derecha y lo que queda a la izquierda se divide por el duplo de la raiz hallada, el cociente que resulta de esta division se apunta en tres partes, al lado de la raiz, al lado del duplo de la raiz que sirvió de divisor, y debajo de este divisor que es el cociente, se multiplica este cociente por todo el divisor y lo que resulta se resta de todo el dividendo, aun del guarismo separado, y al lado de la resta que resulte se baja el período siguiente, se vuelve a separar la última cifra de la derecha y dividir lo que queda por el duplo de la nueva raiz hallada; y asi se continúa del mismo modo hasta que no haya mas períodos que bajar, y el número que está entre las rayas, es la raiz que se busca; si queda algun resíduo, es señal de que el número propuesto no es un cuadrado perfecto, y lo es cuando resulta cero (F).

42 Puede suceder que haya que estraer la raiz cuadrada de un quebrado, y en este caso, no se hace mas que estraer separadamente la raiz de ambos términos del quebrado. Cuando alguno de los términos no es un cuadrado exacto, no se hace mas que indicar la operacion estrayendo la raiz del que se pueda; pero, cuando ninguno de los términos es un cuadrado exacto, se les multiplica por el denominador, y en seguida se estrae la raiz de ambos términos de este producto (L).

43 Antes de pasar adelante, conviene observar que todo cuadrado tiene siempre dos raices, una positiva y otra negativa; porque por ejemplo: 16 puede provenir lo mismo de la multiplicacion de $+4$ por $+4$, que de la de -4 por -4. Por esta razon, siempre que se resuelva una ecuacion de segundo grado, se deberá escribir la raiz que resulte con los dos signos *mas*, y *menos* lo que se suele llamar signo de ambigüedad, que se escribe así: $\pm$ o $\mp$.

De la estraccion de la raiz cuadrada de las cantidades algébricas.

44 Para estraer la raiz cuadrada de las cantidades monomias, hai que atender a los

coeficientes, letras, esponentes y signos. Los coeficientes como son números se les aplican las reglas dadas para ellos.

En cuanto a las letras y esponentes como para multiplicar una cantidad por sí misma, o lo que es lo mismo, para elevarla al cuadrado, el esponente de este debe ser duplo del que tenga en la raiz, se deduce que para estraer la raiz, se le pondrá a cada letra un esponente igual a la mitad del que tenga en el cuadrado.

El signo como ya hemos dicho debe ser en la raiz cuadrada el de *ambigüedad* $\pm$ (43) (M)

45 Para estraer la raiz cuadrada de las cantidades polinomias, se empieza como en la division por ordenarlas con relacion a una misma letra; luego se estrae la raiz cuadrada del primer término de la izquierda, la cual se escribe a la derecha de la cantidad, separada con una raya, y elevándola al cuadrado, se resta del primer término de la izquierda; el siguiente término se divide por el duplo de la raiz hallada, y así se continúa como en la estraccion de las raices numéricas (N).

46 A toda espresion ya sea numérica o literal que no tiene raiz exacta, se le ha dado el nombre de cantidad *irracional* o *inconmensurable*, tales son $\sqrt{7}$; $\sqrt[3]{a}$ etc.

47 De todo lo dicho se deduce que para resolver una ecuacion pura de segundo grado no se hace mas que estraer la raiz cuadrada de ambos términos de la ecuacion.

De las ecuaciones mixtas de segundo grado.

48 Como ya sabemos, las ecuaciones mixtas de segundo grado, son aquellas que además del cuadrado de la incógnita contiene la primera potencia de ella (28).

49 Para resolver las ecuaciones mixtas de segundo grado, es preciso recordar que el cuadrado de un binomio, consta de tres partes: es decir, del cuadro de la primera, mas, el doble producto de la primera por la segunda, y del cuadrado de la segunda (40).

Ahora bien, todas las ecuaciones de segundo grado mixtas, pueden reducirse siempre a esta forma: $x^2 \pm mx = \pm q$, sin que pueda faltar ninguno de sus términos, pues si le falta el primero, deja de ser la ecuacion de segundo grado, si le falta el segundo, deja de ser mixta, y si le falta el tercero, podria facilmente convertirse en ecuacion de primer grado.

50 De lo dicho se infiere que, toda ecuacion de segundo grado despues de tener la forma $x^2 \pm mx = q$ debe contener un cuadrado completo, es decir: constar de sus tres partes, dándosele la forma $a^2 \pm 2ab \pm b^2$, que es la fórmula de una cantidad compuesta de dos partes; y para conseguirlo podemos establecer la regla siguiente:

Complétese la ecuacion, añadiendo a sus dos miembros el cuadrado de la mitad del coeficiente de la incógnita que está elevada a la primera potencia; [lo que se llama completar la ecuacion): en seguida estráigase la raiz cuadrada de ambos miembros, poniendo al segundo miembro el doble signo mas o menos $\pm$, y en la ecuacion del primer grado que resulte, despéjese la incógnita que tendrá dos valores y practicando por último las operaciones que se indiquen, quedará resuelta la ecuacion (O).

51 Por la regla anterior se vé que toda ecuacion de segundo, grado ha de tener siempre dos raices, o lo que es lomismo, dos valores para la incógnita.

Véanse en las Notas el modo de ejecutar esta operacion y la resolucion de algunos problemas [O].

De la elevacion a la tercera potencia o cubo, y de la estraccion de la raiz cúbica de las cantidades númericas y algébricas.

52 Como puede suceder que haya que resolver ecuaciones de tercer grado se hace necesario saber estraer la raiz tercera o cúbica de cualquier cantidad, ya sea numérica o algébrica; y para ello procederemos por dar a conocer la tabla de los números díjitos.

Raices	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Cubos	1	8	27	764	125	216	343	512	729	1000

Aquí se vé que el cubo de un número que solo consta de unidades, no tiene mas que tres guarismos, que el cubo de un número menor de dos guarismos, tiene cuatro;

lo que quiere decir, que el cubo de un número de primer órden, no puede pasar de centenas, y el de segundo no puede bajar de millares.

53 Para estraer pues la raiz cúbica de una cantidad, averigüemos como en la raiz cuadrada, de cuantas y cuales partes consta el cubo de una cantidad que consta de dos partes, es decir de decenas y unidades. Para esto, elevaremos al cubo el binomio $a+b$ y tendremos: $(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$; lo que quiere decir que el cubo de una cantidad compuesta de dos partes, consta de cuatro; a saber: 1° cubo de la primera parte; 2° mas tres veces el cuadrado de la primera parte multiplicado por la segunda; 3° mas tres veces la primera multiplicada por el cuadrado de la segunda 4° mas el cubo de la segunda.

Sabido esto ya podemos estraer la raiz cúbica de cualquier número que conste de mas de tres guarismos, descomponiendo dicho número en dos partes, la una que represente las decenas y la otra las unidades, y analisando en seguida las cuatro partes de que consta.

54 Asi pues para estraer la raiz cúbica de una cantidad, se puede dar la regla siguiente: divídase el número en períodos de a tres cifras empesando por la derecha; estráigase en seguída la raiz cúbica del período que quede a la izquierda, o sáquese el mayor cubo contenido en él y póngase entre las rayas que debe haber como en la division: cubíquese la raiz hallada, y réstese su cubo del período citado: al lado de la resta que

queda bájese el período siguiente, y separando con una coma las dos últimas cifras de la derecha, divídase lo que queda a la izquierda por el triplo del cuadrado de la raiz hallada, y el cociente de esta division escríbase a lado de la raiz: vuélvase a cubicar la raiz con la nueva cifra hallada, y réstese el cubo de los dos primeros períodos de la izquierda del número propuesto, y continúese del mismo modo hasta concluir (P).

Cuando no resulte raiz exacta, se puede aprocsimar cuanto se quiera por decimales, añadiendo al número tres ceros por cada guarismo decimal que se quiera obtener en la raiz [P].

55 Cuando se quiera estraer la raiz cúbica de un quebrado, se estrae la de sus dos términos separadamente; y en caso en que ninguno de ellos sea un cubo perfecto, se multiplicarán ambos por el cuadrado del denominador. Pero si el denominador fuese un cuadrado, bastará multiplicar ambos términos por la raiz cuadrada de dicho denominador (Q).

56 Sabiendo ya estraer la raiz cúbica de las cantidades numéricas, por un medio análogo podemos establecer la regla siguiente para estraer la raiz cúbica de un polinomio: Despues de ordenar el polinomio con relacion a una sola letra, se saca la raiz cúbica del primer término, y se coloca entre las rayas; se cubica esta raiz y se resta su cubo del primer término, se baja al lado de la resta to-

dos los términos, y el primero de estos se divide por el triplo del cuadrado de la raiz, para obtener la segunda parte de la raiz; el cubo de toda la raiz hallada se resta del polinomio, y así se continúa como en las cantidades numéricas; y lo que queda entre las rayas es la raiz que se busca [R].

De la formacion de las potencias en jeneral y de la estraccion de sus raices.

57 Hemos dicho ya que potencia de una cantidad, es el producto que resulta de multiplicar dicha cantidad por si misma, tantas veces menos una como espresa su esponente; sabido esto, podemos ya elevar sin dificultad un número a una potencia cualquiera; así, si queremos elevar el número 42 a la sesta potencia, no haremos mas que multiplicar dicho número cinco veces por si mismo.

Para hacer ver la rapidez con que crecen las potencias de los números, a medida que van siendo mayores en grado, presentamos la tabla siguiente, que contiene las siete primeras potencias de los números díjitos.

POTENCIAS.

Grados de la Potencia.

1.ª	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2.ª	1	4	9	16	25	36	49	64	81
3.ª	1	8	27	64	125	216	343	512	729
4.ª	1	16	81	256	625	1296	2401	4096	6561
5.ª	1	32	243	1024	3125	7776	16807	32768	59049
6.ª	1	64	729	4096	15625	46656	117649	262144	531441
7.ª	1	128	2187	16384	78125	279936	823543	2097152	4782969

58 Para elevar a potencias las cantidades algébricas monomias, hai que atender; 1 ᵒ a los signos; 2 ᵒ a los coeficientes y 3 ᵒ a los esponentes:

1 ᵒ La regla de los *signos* es la siguiente: cuando la potencia sea de esponente par, el signo de la potencia será siempre + y si es impar debe llevar el mismo signo que tenga la raiz.

2 ᵒ Los *coeficientes* como son numéricos, se elevan a la potencia de que se trate por las reglas de la aritmética, es decir multiplicándolos por si mismos, tantas veces menos una, como unidades tenga el esponente.

3 ᵒ La regla de los *esponentes* consiste en multiplicar el esponente que tengan las letras, por el de la potencia a que se quiere elevar la cantidad.

59 Reasumiendo lo dicho, resulta la siguiente regla para elevar un monomio a una potencia dada. Escríbanse una sola vez las letras del monomio; multiplíquese el esponente de cada letra por el de la potencia y dése al resultado el signo + ,si el grado de la potencia es par, y si es impar el de la raiz. [S].

60 Las reglas dadas hasta aquí, no sirven sino para las cantidades monomias, veamos ahora que se hace para elevar las cantidades polinomias a una potencia cualquiera.

Ya hemos dicho [40], que elevando al cuadrado el binomio $a+b$, resulta $a^2+2ab+b^2$; y elevando a la tercera potencia o cubo [53], resulta $a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$, y observando el mismo método podriamos sacar cualquiera potencia de un polinomio, pero los resultados no serian exactos respecto a los coeficientes; porque observariamos que en las diversas multiplicaciones que hai que hacer, estos coeficientes resultan de las reducciones a que dá lugar la semejanza de los términos, que no puede dejar de haber, siendo iguales los términos que se multiplican.

Para sacar pues, con mas prontitud y exactitud una potencia de un binomio cualquiera, haremos uso de una fórmula que se conoce con el nombre de *fórmula del binomio de Newton*, cuya forma es la siguiente:

$$[x+a]^m = x^m + \frac{max^{m-1}}{1} + \frac{m[m-1]\ a^2x^{m-2}}{1\ 2} + \frac{m[m-1]\ (m-2)a^3x^{m-3}}{1\quad 2\quad 3} + \frac{m[m-1[m-2]\dots\dots\dots}{1\ 2\ 3} \frac{[m-n+1]a^nx^{m-n}}{n}.$$

Donde se vé que x es la primera parte del binomio, o la segunda parte; y m es el grado de la potencia; las letras y números grandes representan los coeficientes de las letras pequeñas y los números espresan los términos que ya han pasado.

61 Observando con atencion esta fórmula, se nota: 1° Que cada término consta de la primera parte del binomio multiplicada por la segunda; escepto el primer término que solo tiene la primera parte: 2° Que en todos los términos, el esponente de la pri-

mera parte del binomio es el mismo que el de la potencia, con la diferencia de que en cada término va perdiendo una unidad: 3º Que el esponente de la segunda parte es un número que, desde uno va ganando una unidad en cada término: 4º y último, que el coeficiente de cada término, consta del coeficiente y esponente del término anterior multiplicados entre sí, y divididos por el número de términos que preceden al de que se trate.

62 Segun esto, podemos ya dar por regla, para la formacion de una potencia cualquiera la siguiente. Multiplíquese el coeficiente del término anterior, por el esponente que tenga en el mismo término la primera parte del binomio, y divídase el producto por el número de términos que precedan al buscado; y hecho esto, se disminuirá una unidad al esponente de la primera parte del binomio, y se aumentará al esponente de la segunda [F].

63 Sucede siempre que los términos del binomio que se ha de elevar a una potencia tienen ya coeficientes numéricos y esponentes. En cuyo caso conviene primero indicar las operaciones y luego ejecutarlas [U].

64 La fórmula de Newton que hemos aplicado para elevar a potencias solo un binomio, puede servir tambien para desarrollar la potencia de un grado cualquiera de un polinomio de mayor número de términos; y para esto, basta dar al principio la forma de un binomio al polinomio propuesto; y ejecutando en

seguida las operaciones que estén indicadas quedará aplicada la fórmula (V).

65 Pasemos ahora a la estraccion de raices, empesando por los monomios. Ya sabemos (58), que una potencia de esponente par debe llevar el signo + sea cual fuere el que tenga la raiz: luego una raiz de esponente par deberá llevar el signo doble $\pm$. I como la potencia de esponente impar tiene el mismo signo que la raiz, se sigue de aquí que una raiz de esponente impar, debe llevar el mismo signo que tenga la cantidad de la que se estraiga.

En cuanto a los coeficientes numéricos, se estraerá la raiz si se puede, y si no se dejará indicada la operacion debajo del radical.

Como el esponente de una potencia cualquiera de una cantidad, se forma multiplicando el de la cantidad por el de la potencia (58), el esponente de una raiz se sacará dividiendo el de la cantidad por el del radical (K).

66 Cuando no se pueda ejecutar exactamente la division de los esponentes, se debe sacar todo lo que se pueda fuera del radical: para lo cual se sacan los enteros del esponente fraccionario, y se descompone la cantidad en dos factores, poniendo al primer factor el esponente entero, y al segundo el esponente quebrado; y luego, en lugar de este último se pone el signo radical volviendo a ejecutar la misma operacion (Y).

67 La estraccion de cualquier raiz polinomia o númerica que conste de decenas y unidades, es enteramente sencilla habiendo co-

nocido ya la lei con que se forman las potencias. En efecto la regla es la siguiente:

Divídase el número propuesto en períodos de tantas cifras cuantas unidades tenga el esponente de la raiz, sáquese en seguida del período de la izquierda la misma raiz exacta o aprocsimada que la de toda la cantidad, colóquese esta raiz entre las rayas, elévese dicha raiz a tantas veces la potencia, cuantas unidades tenga el esponente de la raiz, réstese esta potencia del período de la izquierda y al lado de esta resta, bájese el período siguiente, sepárense a la derecha tantas cifras menos una, como unidades tenga el esponente siempre de la raiz; en seguida elévese la raiz hallada a tantas veces la potencia menos una, como unidades tenga el esponente, multiplíquese esta potencia por dicho esponente, y el producto divídase por lo que quedó a la derecha de la cantidad separada, y el cociente colóquese al lado de la raiz, y restando del número propuesto la tantas veces potencia como unidades esprese el esponente, quedará concluida la operacion (Y).

68 La estraccion de las raices de las cantidades algébricas, se funda tambien en los mismos principios que la de las cantidades numéricas; es decir, en las leyes de la formacion de potencias. En efecto, basta ordenar los términos como en la division, fijarse en el grado de la raiz, y luego continuar lo mismo que en la estraccion de la raiz cuadrada o cúbica, con la diferencia del grado (54) (Z).

De las proporciones.

69 Razon como en aritmética es la igualdad de dos cantidades.

Proporcion es la igualdad de dos razones: Las propiedades de las proporciones que se han demostrado en aritmética, se pueden tambien demostrar en álgebra con facilidad porque atendiendo a la definicion, toda proporcion suministra una ecuacion. De aquí resulta que representándose por letras los cuatro términos consecutivos de una proporcion aritmética o equidiferencia, resulta para esta la siguiente propiedad fundamental:

En toda equidiferencia la suma de los estremos es igual a la de los medios. I si la equidiferencia fuese contínua, la suma de los estremos será igual al duplo del término medio.

70 Lo mismo se dice de una proporcion geométrica o por cociente; como la primera razon es igual a la segunda, se deduce que en toda proporcion geométrica el producto de los estremos es igual al de los medios. I si la proporcion es contínua, el producto de los estremos será igual al cuadrado del término medio (A).

71 Síguese de aquí tambien que si cuatro cantidades son tales que el producto de dos de ellas es igual al de las otras dos, dichas cantidades están en proporcion (B).

72 Hai varios modos de colocar los términos subsistiendo siempre la proporcion; y a estas diversas mutaciones se han dado los nom-

bres de *alternar*, *invertir*, *componer y dividir.*

Alternar es, comparar el primer término con el tercero, y el segundo con el cuarto, o lo que es lo mismo cambiar de lugar los estremos y los medios.

Invertir es, poner los consecuentes por antecedentes y estos por aquellos.

Componer es, comparar la suma de los dos términos de cada razon con el antecedente o consecuente. (C).

Si cuatro cantidades están en proporcion tambien lo están sus potencias o raices de un mismo grado.

Asi mismo en toda série de razones iguales la suma o diferencia de los antecedentes es a la de los consecuentes, como cada antecedente es a su consecuente.

De las progresiones.

Las progresiones se dividen en *aritméticas y geométricas* que tambien se llaman progresiones por diferencia y por cociente.

La progresion aritmética o por diferencia es una série de términos tales que cada uno lleva al que le precede o al que le sigue un mismo exeso o diferencia. Cuando los términos van creciendo, la progresion se llama creciente, y cuando van disminuyendo, se llama decreciente.

Una progresion aritmética se escribe, poniendo antes de los términos dos puntos separados con una raya, y en seguida se colocan los términos separados unos de otros por un solo punto (D).

Del modo con que se forma una pregresion aritmética, resulta que el segundo término es igual al primero mas o menos la razon; el tercero es igual al segundo mas o menos la razon; y en jeneral, un término cualquiera se compone del que antecede, mas o menos la razon. De aquí se sigue que el tercer término será tambien igual al primero, mas o menos dos veces la razon; y en jeneral, un término cualquiera se compondrá del primero, mas o menos tantas veces la razon como términos hai antes de él.

Por consiguiente, representando por a el primer término de la progresion, por d la razon o diferencia, bien sea positiva o negativa, y por n el número de términos que quieran hallarse, tendremos esta ecuacion: $u=a+(n-1)d$; que es la fórmula jeneral que representa el valor de un término cualquiera, y con cuyo auxilio se puede hallar dicho término, sin necesidad de formar la progresion con tal de que se den los valores de a,n y d (E).

74 Progresion geométrica o por cociente es una série de términos tales, que cada uno contiene al que le antecede o al que le sigue un mismo número de veces; en el primer caso es creciente, y en el segundo decreciente.

Una progresion geométrica se escribe poniendo antes de los términos cuatro puntos separados por una raya, y en seguida los términos separados unos de otros por dos puntos. Del modo como se forma una progresion geométrica se deduce que el segundo término se compone del primero multiplicado por la razon; y el tercero se compone del primero multiplicado por el cuadrado de la razon; y en jeneral, un término cualquiera se compone del primero multiplicado por tantas veces la potencia de la razon como términos hai antes del que se busca (F).

Por consiguiente, si se representa por a el primer término de la progresion, por q la razon, por u el término buscado, y por n el lugar que debe ocupar, será $u=aq^{n-1}$; una fórmula, con cuyo aucilio y conocidos los valores de las letras a,q y n, se puede encontrar el valor de un término cualquiera (G).

De los logaritmos.

75 En todas las ecuaciones que hemos resuelto hasta aquí la incógnita espresaba siempre una cantidad, con la cual se habia hecho una de las operaciones del cálculo, y por medio de estas podia encontrarse el valor de dicha incógnita. Pero no sucede lo mismo con una ecuacion en que la incógnita que es un esponente, no espresa la cantidad que se ha de operar, sino únicamente el número de veces que la cantidad a que afecta debe entrar como dato en la formacion de la otra cantidad.

No estando pues combinada la incógnita con las demas cantidades de la ecuacion por ninguna de las operaciones ariméticas, no se puede conocer su valor por ninguna de estas operaciones, o lo que es lo mismo, no se puede despejar la incógnita en las ecuaciones de esta especie que se llaman *esponenciales*; por consiguiente es preciso recurrir a nuevos medios para lograr el fin que se desea.

76 Para resolver las ecuaciones esponenciales, es preciso considerar a todos los números, o a las letras que los representen como potencias de otro cualquiera que se elija con este objeto. Si queremos que un mismo número, elevado a diferentes potencias, represente todos los números imajinables entre cero y el infinito, no hai duda que los esponentes de dichas potencias hábran de ir variando sucesivamente. El número pues que se elije como raiz para elevarle a las diferentes potencias necesarias, a fin de que resulten todos los números imajinables, se conoce con el nombre de *base logarítmica*; y a los diversos esponentes a que se ha de elevar esta base o raiz para que resulten todos los números; se les ha dado el nombre de *logaritmos* de los números. Asi pues, si se tomase por base el número 2, seria 3 el logaritmo de 8, y 7 seria el de 128.

77 Siendo pues los logritmos unos esponentes, se les pueden aplicar las reglas dadas para aquellos, y abreviar por este medio las operaciones de multiplicar, dividir, elevar a potencias y estraer raices. En efecto si representamos por a la base de un sistema de logaritmos; por x el logaritmo de

un número cualquiera b, y u, el de otro número c, tendremos las ecuaciones ($b=a^x$) y ($c=a^u$). Multiplicando entre sí estas ecuaciones, tendremos, ($bc=a^{x+u}$). Lo que quiere decir que el logaritmo de un producto es igual a la suma de los logaritmos de los factores.

Si en vez de multiplicar dichas ecuaciones las dividimos resulta ($\frac{b}{c}=a^{x-u}$): lo que quiere decir que el logaritmo de un cociente es igual al logaritmo del dividendo, menos el del divisor.

Si elevamos cualquiera de dichas ecuaciones, por ejemplo la primera, a una potencia de cualquier grado representado por m, resulta ($b^m=a^{mx}$): lo que nos dice que el logaritmo de una potencia de cualquier cantidad es igual al de la misma cantidad multiplicado por el esponente de la potencia.

Si de la misma ecuacion se estrajese la raiz de un grado cualquiera cuyo esponente fuese n, se tendria ($\sqrt[n]{b}=a^{\frac{x}{n}}$); lo quiere decir que el logaritmo de una raiz es igual al cociente del logaritmo de una potencia dividido por el esponente de la raiz.

De aquí se infiere, que si se tuviesen unas tablas que contuviesen los logaritmos de todos los números sucesivos, a lo menos hasta un cierto límite, podriamos hacer las operaciones valiéndonos en vez de los números, de sus logaritmos, y tomando el número a que corresponde, en las tablas, el logaritmo que hubiese resultado.

78 *Logaritmos comunes* El sistema jeneralmente adoptado en la actualidad es el llamado *sistema tabular*, o de logaritmos tabulares o comunes.

La base elejida para el sistema tabular es el número 10; por consiguiente en dicho sistema se considera a todos los números como potencias del número 10. De aquí se infiere que los números,

1; 10; 100; 1000; 10000; 100000; etc.

que son todas potencias exactas de 10, tendran por logaritmos en este sistema a los números.

0; 1; 2; 3; 4; 5; etc.

79 De aquí se deduce que los números intermedios entre 1 y 10 tendrán sus logaritmos entre 0 y 1; los números intermedios entre 10 y 100, es decir los números de dos cifras, tendrán sus logaritmos entre 1 2, esto es 1 con una fraccion; los intermedios entre 100 y 1000, es decir los números de tres cifras, tendrán sus logaritmos entre 2 y 3, esto es 2 con una fraccion...etc.

El número entero de un logaritmo, se llama *característica*, y la fraccion decimal *mantisa*.

80 De lo dicho se deduce: 1° Que la característica que corresponde al logaritmo de un número, es igual a tantas unidades menos una como guarismos tiene el número.

2° Que los logaritmos de los números que crecen o decrecen en progresion décupla tienen una misma mantisa. Por consiguiente, si se añade una unidad a la característica del logaritmo de un número, dicho logaritmo corresponderá ya a otro número décuplo del anterior: si se le añadiesen dos unidades corresponderia, ya a otro número céntuplo del primero y asi sucesivamente. Si al contrario se quitase una unidad de la característica del logaritmo de un número, corresponderia ya otro, que seria décima parte del anterior; y si se rebajasen dos unidades, el logaritmo corresponderia ya a otro número, centécima parte del anterior.

3 ° Que los números que constan de la unidad seguida de ceros tienen característica, y carecen de mantisa.

4 ° Que los logaritmos de los quebrados propios son negativos. Porque, como el logaritmo de un quebrado es igual al del numerador menos el del denominador; y como en el quebrado propio el numerador es menor que el denominador, será tambien el logaritmo del primero menor que el del último, por consiguiente, si se resta este de aquel deberá ser negativo el resíduo.

81 Para evitar el uso los logaritmos *defectivos*, no se hace mas que añadir al logaritmo minuendo cierto número de unidades hasta diez, pero teniendo cuidado de hacer en el resultado final la rebaja de una decena de la característica, para compensar la alteracion que debe producir en dicho resultado el aumento del primer logaritmo (H).

FIN.

Notas o ejemplos donde se demuestran las esplicaciones del testo.

PRIMERA PARTE.

Simplificacion.

A—Sea el polinomio $3a^2b+4a^3+6a^2b+a^3+8a^3$, que simplificándolo será: $9a^2b+13a^3$.

B y C—Simplificando este otro polinomio, $-a^4b^3+4a^4b^3$ resultará $-5a^4b^3$

Adicion.

D—Sean los polinomios $(3a^3b)+(c^4d^3)-(6a^3b^4)+(4a^3b^4)+(2a^2b)-(c^4d^3)$ que haya que sumar; quitando los paréntesis, será $3a^3b+c^4d^3-6a^3b^4+4a^3b^4+2a^2b-c^4d^3$; y simplificando resulta $5a^2b-2a^3b^4$.

Sustraccion.

E—Sean el minuendo y sustraendo $(6a^3b^2-4c^4d^6)(-8c^4d^6+3a^3b^2)$, cambiando los signos del sustraendo será $6a^3b^2-4c^4d^6+8c^4d^6-3a^3b^2$, y simplificando dará $3a^3b^2$.

Multiplicacion.

F—Sean los dos monomios para multiplicar $8a^6b^4 \times -2a^4c^2$, segun la regla dará $-16a^{10}b^4c^2$.

G—Si se quiere multiplicar $3a^2b+4c^2-5a^3b^2$ por a^2b. resultará $3a^4b^2+4a^2bc^2-5a^5b^3$.

H—Sean los polinomios $4a^2b-3ab+2bcd^2 \times 2ab-a^2b$, que multiplicando segun la regla resultará.

$$\begin{array}{r} 4a^2b-3ab+2bcd^2 \times \\ 2ab-a^2b \\ \hline 8a^3b^2-6a^2b^2+4ab^2cd^2 \qquad\qquad \\ -4a^4b^2+3a^3b^2-2a^2b^2cd^2 \\ \hline 11a^3b^2-6a^2b^2+4ab^2cd^2-4a^4b^2-2a^2b^2cd^2 \end{array}$$

Division:

J—Examinando todos los casos de la division de un monomio por otro, resultan los siguientes ejemplos:

$$\frac{4a^4b^2c}{2a^2b}=2a^2bc;\ \frac{5a^3mn}{-a^2n}=-5am;\ \frac{-3a^2bnp}{+5a^2brs}=\frac{3np}{5rs};\ \frac{a^5}{a^3b^2}=\frac{a^2}{b^2};\ \frac{5abn}{-xrs}=\frac{-5abn}{xrs}.$$

K—Sean el dividendo y divisor que tengamos que dividir,

$$a^4+4a^3b+6a^2b^2 \,|\, a^2$$

$a^2+4ab+6b^2$ y resultará este cociente.

L—Sean los polinomios $3a^2b+3b^2a+a^3+b^3 \cdot \rceil . a+b$, que despues de ordenados, se ejecutará de este modo:

$$\begin{array}{l|l} a^3+3a^2b+3b^2a+b^3 & a+b \\ -a^3-a^2b & a^2+2ab+b^2 \end{array}$$

1ª resta...0 $+2a^2b+3b^2a+b^3$

$-2a^2b-2b^2a$

2ª resta...0 $+b^2a+b^3$

$-b^2a-b^3$

última resta...0 0

Quebrados literales.

M—*Adicion*—Supongamos los sumandos $\frac{a}{d}+\frac{b}{m}+\frac{c}{n}$ que reduciéndolos a un conmun denominador, serán $\frac{amn}{dmn}+\frac{bdn}{dmn}+\frac{cdm}{dmn}$ y sumados dan $\frac{amn+bdn+cdm}{dmn}$.

M—*Sustraccion*—Sean el minuendo y sustraendo $\frac{a}{d}-\frac{b}{m}$, reduciendo a un comun denominador y restando los numeradores, darán, $\frac{am-bd}{dm}$.

O—*Multiplicacion*—Siendo los dos factores $\frac{a}{m}\times\frac{c}{n}$, el producto será $\frac{ac}{mn}$.

P—*Division*—Suponiendo que el dividendo y divisor, sean $\frac{a}{m}:\frac{c}{n}$, multiplicándolos en cruz, el cociente será $\frac{an}{cm}$.

SEGUNDA PARTE.

De la resolucion de las ecuaciones de primer grado con una sola incógnita.

A—La $a^2-bx=c$ es una ecuacion de primer grado; $a^2x+x^2=c$ es ecuacion de segundo grado; y $ax^3=b$ es de tercero &.

B—La ecuacion $ax^2+bxz^3=cx+dz$ es de cuarto grado, porque la suma de los esponentes de las variables es 4.

C—La ecuacion $ax^2=b$ es pura o incompleta. I esta otra $ax^2+bx=c$ es una ecuacion mista, completa o afecta.

D.—Sea la ecuacion $\frac{x}{a}-ab-ax=cx+ad-\frac{a^3x}{c}$, haciendo la trasposicion se tiene $\frac{x}{a}+\frac{a^3x}{c}-ax-cx=ad+ab$: quitando ahora los divisores, será $cx+a^4x-a^2cx-ac^2x=a^2cd+a^2bc$.

E—1° Cuál es el número que multiplicado por 8 produce 224?—Suponiendo x el número que se busca, será 8 multiplicado por x, es decir $8x=224$, haciendo la trasposicion, será $x=\frac{224}{8}$ y ejecutando la operacion resultará $x=28$, que es el número que se busca.

2° En una inundacion cayeron la mitad de las casas que habia en una ciudad; el dia siguiente la 3ª parte, y despues la 12ª de modo que no quedaron mas que 56. Cuántas casas habia antes de la inundacion? Suponiendo x el número de casas, y siguiendo las condiciones del problema será $\frac{x}{2}+\frac{x}{3}+\frac{x}{12}+56=x$;desapareciendo los divisores, dará $36x+24x+6x+4032=72x$; haciendo ahora la trasposicion y ejecutando las operaciones indicadas resulta, $6x=4032$. Luego $x=\frac{4032}{6}=672$, que es el número de casas de dicha ciudad &.

F—*Sostitucion*—Un padre tiene el cuádruplo de la edad de su hijo, y la suma de las dos edades hace 95 años. Cuál es la edad de cada uno?

Siendo x la edad del padre y z la del hijo, siguiendo las condiciones del problema, tendremos las dos ecuaciones, $\left.\begin{array}{r} x=4z \\ x+z=95 \end{array}\right\}$ despejando x en la primera, será $x=4z$; sostituyendo ahora la x de la segunda con su valor dará $4z=z+95$, que es una ecuacion con una sola incógnita y despejando esta resulta $z=\frac{95}{5}=19$, que es la edad del hijo. Para sacar el valor de x se hace igual operacion con z, o se multiplica 19 por 4 y resulta 76 que es la edad del padre.

G—*Igualacion*—Suponiendo el mismo problema que el anterior, tendremos $\left.\begin{array}{r} x=4z \\ x+z=95 \end{array}\right\}$ sacando en ambas los valores de x, será

$\left.\begin{array}{l}x=4z\\x=95-z\end{array}\right\}$, igualando ambos valores, dará $4z=95-z$; que es ecuacion con una sola incógnita y despejando esta será $z=\frac{95}{5}=19$; que es la edad del hijo, la del padre se saca de la misma manera y resulta $x=76$.

H—*Adicion o sustraccion*—Con el mismo problema tenemos $\left.\begin{array}{l}x=4z\\x+z=95\end{array}\right\}$; como los coeficientes de x son iguales, y siendo de un mismo signo se restan las dos ecuaciones y será $-\begin{array}{l}x=4z\\x-z=95\end{array}$, y ejecutando las operaciones resulta $5z=95$ luego $z=\frac{95}{5}=19$, edad del hijo, multiplicando por 4 da 76, edad del padre.

Ecuaciones de segundo grado.

I—Sea la ecuacion $x^2=49$, que estrayendo la raiz cuadrada del segundo miembro y despejando la incógnita será $x=\sqrt{49}=7$.

Problema—Cuál es el número cuyo cuadrado aumentado de 4 sea iqual a 488? Llamando x el número, será $x^2+4=488$, haciendo la trasposicion dá $x^2=488-4$ y estrayendo la raiz de ambos miembros, resulta $x=\sqrt{488-4}$ y $488-4$ es 484 su raiz cuadrada 22, luego $x=22$.

F—Propongámonos estraer la raiz cuadrada del número 60,025. Para esto se coloca como queda dicho, y siguiendo la regla resultará.

6,00,25	245—cuadrado
4	44
1ª resta—20,0	4
176	
2ª resta 24 2,5	485
24 2 5	5
última resta. 0	

L. Estrayendo la raiz cuadrada del quebrado $\sqrt{\frac{9}{25}}$, se tiene $\sqrt{\frac{9}{25}}=\frac{3}{5}$. Cuando alguno de los términos no es raiz exacta, por ejemplo $\frac{7}{16}$, se indica nomas la operacion, $\sqrt{\frac{7}{16}}=\frac{\sqrt{7}}{4}$. No siendo raiz exacta ninguno de los términos, por ejemplo $\frac{8}{10}$, segun la regla se tendrá $\sqrt{\frac{8}{10}}=\sqrt{\frac{80}{100}}=\frac{\sqrt{80}}{10}$.

Estraccion de la raiz cuadrada de las cantidades algébricas.

M. Estrayendo la raiz cuadrada de a^4, será $\sqrt{a^4}=a^{\frac{4}{2}}=\pm a^2$. Del mismo modo $\sqrt{a^4b^2c^6}=a^{\frac{4}{2}}b^{\frac{2}{2}}c^{\frac{6}{2}}=\pm a^2bc^3$ &.

N. Sea el polinomio $9a^4c^2+12a^2b^2c+4b^2$, que estrayendo la raiz cuadrada, la operaoicn será como sigue:

$$\sqrt{9a^4c^2+12a^2b^2c+4b^2} \,|\, 3a^2c+2b^2 \text{.—cuadrado}$$
$$-9a^4c^2 \qquad\qquad 6a^2c+2b^2$$
resta. 0 $\quad 12a^2b^2c+4b^2$
$\qquad -12a^2b^2c-4b^2$
última resta. $\quad$ 0

De las ecuaciones mistas de segundo grado.

O.—Sea la ecuacion $x^2+mx=q$, que completándola segun la regla, será, $x^2+mx+\frac{m^2}{4}=q+\frac{m^2}{4}$; y estrayendo la raiz de ambos miembros se tendrá la ecuacion de primer grado $x+\frac{m}{2}=\pm\sqrt{q+\frac{m^2}{4}}$; de donde salen para x los dos valores siguientes: $\left(x=-\frac{m}{2}+\sqrt{q+\frac{m^2}{4}}\right)$ y $\left(x=-\frac{m}{2}-\sqrt{q+\frac{m^2}{4}}\right)$

De la elevacion a la tercera potencia o cubo y de la estraccion de la raiz cúbica de las cantidades numéricas y algébricas.

P.—Sea el número 97,336 del que estrayendo la raiz cúbica segun la regla, se tiene:

	97,336	46—cubo
	64	48
1ª resta	333,36	
	973 36	
última resta.	0	

P.—Sea la cantidad 1225, de la que se trata de estraer por aprocsimacion, la raiz cúbica y segun lo dicho en la regla, tendremos;

```
              1225 | 10, 9, cubo.
              1    |
1.ª resta     0225
              1000
2.ª resta     0225000
              1195022
última resta  0029,971
```

Q.—Estrayendo la raiz cúbica de un quebrado, cuyos términos son cubos perfectos se tiene, $\sqrt[3]{\frac{64}{125}}=\frac{4}{5}$. I no siendo ninguno de los términos un cubo exacto, segun la regla resulta, $\sqrt[3]{\frac{5}{12}}=\sqrt[3]{\frac{720}{1728}}=\frac{\sqrt[3]{720}}{12.}$

Pero cuando el denominador del quebrado es un cuadrado perfecto, se tiene, $\sqrt[3]{\frac{15}{49}}=\sqrt[3]{\frac{105}{343}}=\frac{\sqrt[3]{105}}{7.}$

R.—Si nos proponemos estraer la raiz cúbica del polinomio $36a^2b^6-54a^4b^3+27a^6-8b^9$, ordenándolo con relacion a la letra a será.........

	$\sqrt[3]{27a^6-54a^4b^3+36a^2b^6-8b^9}$	$3a^2-2b^3$..(cubo del pol)
	$-27a^6$	
1ª resta	$0-54a^4b^3+36a^2b^6-8b^9$	$27a^4$ (tplo del cuad. de
c. de la raiz	$+54a^4b^3-36a^2b^6+8b^9$	$-2b^3$ la raiz).
última resta	0 0 0	

De la formacion de potencias en jeneral y de la estraccion de sus raices.

S.—Sea el monomio, $a^4b^2c^3$, que se quiere elevar a la sesta potencia, y como el esponente de esta es par, se tendrá $(a^4b^2c^3)^6=a^{24}b^{12}c^{18}$. Pero si elevamos el mismo monomio a la quinta potencia, siendo el esponente impar, será: $-(a^4b^2c^3)^5=-a^{20}b^{10}c^{15}$.

T.—Haciendo la aplicacion de la fórmula del *binomio de Newton*, y siguiendo la regla para elevar un binomio a una potencia cualquiera; propongámonos elevar a la sesta potencia el binomio $(x+a)$, poniendo c en lugar de x, d en lugar de a, y b en lugar de m de la fórmula, con lo que resultará: $(c+d)^6=c^6+6c^5d+15c^4d^2+20c^3d^3+15c^2d^4+6cd^5+d^6$, que será la 6ª potencia del binomio $c+d$.

U.—Supongamos que hubiera que elevar a la quinta potencia el binomio $3b^2c-4dn^2$. en que procederíamos del modo siguiente:

$(3b^2c-4dn^2)^5=(3b^2c)^5-5(3b^2c)^4\times4dn^2+10(3b^2c)^3(4dn)^2-10(3b^2c)^2(4dn^2)^3+5\times3b^2c(4dn^2)^4-(4dn^2)^5$ donde se ven las operaciones solo indicadas; ejecutando dichas operaciones, resulta:

$243b^{10}c^5-1620b^8c^4dn^2+4320b^6cd^2n^4-5760b^4c^2d^3n^6+3840b^2cd^4n^8-1024d^5n^{10}$ que es la quinta potencia del polinomio propuesto.

V.—Sea el trinomio $a+b+c$ que queremos elevar a la 3ª potencia, descomponiendo en las dos partes $(a+b)$ y (c), aplicando la fórmula, será $(a+b+c)^3=(a+b)^3+3(a+b)^2c+3(a+b)c^2+c^3$; y ejecutando en seguida las operaciones que están indicadas se tendria el resultado.

K.—Si quisieramos estraer la raiz cuadrada del monomio $9a^6b^8$, será $\sqrt{9a^6b^8}=3a^3b^4$: así mismo $\sqrt[3]{-8a^9b^6}=2a^3b^2$: y en jeneral $\sqrt[n]{a^m}=a^{\frac{m}{n}}$, que es la fórmula para todos los casos.

Y.—Si buscamos la raiz cúbica de $a^5b^7c^6$ será $\sqrt[3]{a^5b^7c^6}=a^{\frac{5}{3}}b^{\frac{7}{3}}c^{\frac{6}{3}}=aa^{\frac{2}{3}}b^2b^{\frac{1}{3}}c^2=ab^2c^2\times a^{\frac{2}{3}}b^{\frac{1}{3}}=ab^2c^2\sqrt[3]{a^2b}$.

Y.—Sea el número 97,65625 del que nos proponemos sacar la raiz quinta, para siguiendo la regla dispondremos de este modo

	97,65625	25...5ª potencia.
	32	80
1ª resta	656,5625	
	976 5625	
última resta	0	

Z.—Supongamos que se quiera estraer la raiz cuarta del polinomio $16c^8d^4-96c^6d^3n+216c^4d^2n^2-216c^2dn^3+81n^4$, que ordenándolos y siguiendo la regla, se practicará de este modo.

$$\begin{array}{l|l}
16c^8d^4-96c^6d^3n+216c^4d^2n^2-216c^2dn^3+81n^4 & 2c^2d-3n.\text{ raiz } 4^a. \\
-16c^8d^4. & \overline{32c^6d^3.} \\
\hline
1^a.\ \text{resta..}0 \quad -96c^6d^3n+216c^4d^2n^2-216c^2dn^3+81n^4 & \\
\quad -16c^8d^4+96c^6d^3n-216c^4d^2n^2+216c^2dn^3-81n^4 & \\
\hline
\text{última resta.}0 \qquad 0 \qquad 0 \qquad 0 \qquad 0 &
\end{array}$$

De las proporciones.

A.—Sea la proporcion $a:c::c:d$; como la primera razon es igual a la segunda, se tiene $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ y quitando los divisores, resulta $ad=bc$; I si la proporcion es contínua, es decir fuese $a:b::b:d$, resultaria $ad=b^2$.

B.—Sea la ecuacion $ad=bc$, de la que resultan inmediatamente estas cuatro:

(1) $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$; (2) $\frac{a}{c}=\frac{b}{d}$; (3) $\frac{d}{b}=\frac{c}{a}$; (4) $\frac{d}{c}=\frac{b}{a}$;
luego la ecuacion $ad=bc$, está en proporcion.

C.—Sea dada la proporcion $a:b::c:d$; de donde resultan:

	$a:b::c:d$
Alternando	$a:c::b:d$
Invirtiendo	$b:a::d:c$
Componiendo	$\begin{cases} a+b:b::c+d:d \\ a+b:a::c+d:a \end{cases}$
Dividiendo	$\begin{cases} a-b:b::c-d:d \\ a-b:a::c-d:c \end{cases}$

De las progresiones

D.—La progresion aritmética se escribe así:

$\div 1.4.7.10.13.16.19.22.\&.$
$\div 41.37.33.29.25.21.\&.$

la primera de estas progresiones se llama creciente, y la segunda decreciente.

E.—Por ejemplo, si queremos encontrar el sesto término de una progresion aritmética, cuyo primer término fuese 4 y la razon 3, esto es, que fuese $a=4$, $d=3$, $n=6$; y llamándola u segun la fórmula, tendremos: $u=4+6\times3=4+18=22$.

Si nos pidiesen el octavo término de una progresion cuyo primer término fuese 46 y la razon—3; y como esta es negativa, indica que la progresion debe ser decreciente; por consiguiente resulta:

$$u=46+7\times-3=46-21=25.$$

F.—La progresion geométrica se escribe así:

$$\div 2:4:8:16:32:64:128: \&.$$

$$\div 96:48:24:12:6:3: \&.$$

siendo la primera creciente, y la segunda decreciente.

Representando por a el primer término de una progresion, por q la razon y por n el número de términos, será:

$$\div a:aq:aq^2:aq^3:aq^4\ldots:aq^{n-1}$$

la fórmula jeneral de todas las progresiones geométricas.

G.—Si queremos encontrar el sesto término de una progresion geométrica, cuyo primer término sea 3 y la razon 2, será:

$$u=3\times 2^5=3\times 64=192.$$

H.—Toda esta parte de los logaritmos, se estudia con mas facilidad en las tablas logarítmicas.

FIN.

ERRORES NOTABLES.

En la pájina 32, línea 20, donde dice: derecha debe leerse izquierda.

En la pájina 34 falta la definicion del modo de dividir una proporcion, que es como sigue: Dividir es comparar la diferencia de los dos términos de cada razon con el antecedente o consecuente.